DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN POR EL MÉTODO DE MONTE CARLO EN LOS PROCESOS DE MANUFACTURA

Yoel Portuondo Paisan, Juan Portuondo Moret
***Facultad de Ingeniería Mecánica Universidad de Oriente**

El conocimiento y la expresión de la incertidumbre de medición constituyen una parte indisoluble de los resultados de las mediciones, así como un elemento indispensable de la trazabilidad de las mediciones y en el control y regulación de los procesos de manufactura.
En el presente trabajo se lleva a cabo la determinación de la incertidumbre de medición a través del método de simulación de Monte Carlo, a partir de la generación de valores aleatorios, con el objetivo de comparar los resultados con los obtenidos por el método GUM (guía para la estimación de la incertidumbre de medición). Como magnitud a medir, se utiliza el diámetro exterior de un eje macizo, el cual fue obtenido por un proceso de manufactura (torneado), y como medio de medición se emplea un micrómetro analógico. Los resultados obtenidos por ambos métodos se comparan entre sí, llegándose de esta forma a importantes conclusiones.
Palabras clave: *incertidumbre de medición, simulación Monte Carlo.*

The knowledge and the expression of the measurement uncertainty constitute an indissoluble part of the measurement results, as well as an indispensable element of the Traceability of the measurements and in the control and regulation of the manufacturing processes.
The determination of the measurement uncertainty through the method of simulation of Monte Carlo is carried out, from the generation of random values, with the objective of comparing the results with those obtained by the method GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement). As magnitude to be measured is used the external diameter of a solid cylinder, which was obtained by the manufacturing process (lathed), and a analogical micrometer is used as measuring instrument. The results obtained by both methods are compared each other and important conclusions are obtained.
Key words: *Measurement uncertainty. Simulation Monte Carlo.*

Introducción

La incertidumbre de medición se define como un parámetro asociado con el resultado de una medición que caracteriza la dispersión de los valores que pudieran ser atribuidos razonablemente al mesurando /1/. La misma es considerada también como un parámetro de entrada fundamental para modelos complejos de optimización en los procesos de fabricación y aseguramiento de la calidad.

Para la evaluación de la incertidumbre de medición existen guías, normas y recomendaciones. En siguiente trabajo persigue como objetivos determinar la incertidumbre de medición por los métodos de simulación de Monte Carlo y por el GUM, y comparar los resultados obtenidos por ambos métodos.

Gracias a la constante evolución de las microcomputadoras, en lo que se refiere a su capacidad de procesamiento de la información, el método de Monte Carlo es cada vez más utilizado.

Los orígenes de esta técnica están ligados al trabajo desarrollado por Stan Ulam y John Von Neumann a finales de los 40, en el laboratorio de Los Alamos, cuando investigaban el movimiento aleatorio de los neutrones. En años posteriores, la simulación de Monte Carlo se ha venido aplicando a una infinidad de ámbitos como alternativa a los modelos matemáticos exactos o, además, como único medio de estimar soluciones para problemas complejos. Así, en la actualidad, es posible encontrar modelos que hacen uso de simulación Monte Carlo en las áreas informática, empresarial, económica, industrial e incluso social. En otras palabras, la simulación de Monte Carlo está presente en todos aquellos ámbitos en los que el comportamiento aleatorio o probabilístico desempeña un papel fundamental. Precisamente, el nombre de Monte Carlo proviene de la famosa ciudad de Mónaco, donde abundan los casinos de juego y donde el azar, la probabilidad y el comportamiento aleatorio conforman todo un estilo de vida.

Fundamentación teórica

La simulación de Monte Carlo es una herramienta de investigación y planeamiento; básicamente es una técnica de muestreo artificial, empleada para operar numéricamente sistemas complejos que tengan componentes aleatorios, en otras palabras, es una técnica que combina conceptos estadísticos (muestreo aleatorio) con la capacidad que tienen los ordenadores para generar números pseudo-aleatorios y automatizar cálculos.

Un elemento importante en los procesos de simulación es identificar las distribuciones de probabilidad apropiadas para los datos. Esto, normalmente, requiere analizar información empírica o histórica, y ajustarla a alguna distribución.

El método de Monte Carlo (MCM) es un método probabilistico o estocástico, mientras que la GUM utiliza métodos determinísticos de estadística clásica (frecuentista) para la evaluación de de incertidumbre tipo A, y lleva a cabo la evaluación de incertidumbres tipo B y la combinación de incertidumbres con el método Bayesiano de soluciones analíticas.

La diferencia básica consiste en que la estadística clásica (frecuentista) utiliza solamente la información provista por la muestra, mientras que la estadística Bayesiana permite utilizar adicionalmente el conocimiento subjetivo que se tenga (como aproximaciones con series de Taylor o suponer distribuciones), y el método estocástico se entiende como una secuencia de estados, cuya evaluación viene determinada por sucesos al azar, donde las leyes de causa efecto no explican cómo actúa un sistema o fenómeno de manera determinista, sino en función de probabilidades.

El MCM es una alternativa práctica a la GUM cuando:

a) La linealización del modelo (del mensurando) provee una inadecuada representación. En este caso, la estimación de la magnitud de salida (mensurando) y su incertidumbre estándar asociada provista por la GUM, podría no ser confiable.
b) La función de densidad de probabilidad (PDF) para la magnitud de salida (mensurando) se aparta, apreciablemente, de una distribución gaussiana o de una distribución-t escalada y sesgada, debida a una marcada asimetría. En este caso, el resultado es un intervalo de cobertura irreal (una generalización de “incertidumbre expandida” en la GUM).
c) Es necesario validar los resultados del método GUM, proceso crítico, como los de acreditación ISO/IEC 17025, ensayos de aptitud y comparaciones entre laboratorios.

Métodos utilizados y condiciones experimentales

Para llevar a cabo la experimentación, se fabricó un cilindro macizo de bronce a través del torneado. El diámetro de dicho cilindro se midió con un micrómetro con valor de división del tambor 0,01 mm y error máximo permisible 4 µm (clase I). La medición se realizó en un laboratorio de mediciones a 20 ^{0}C de temperatura. Para tener en cuenta las imperfecciones del cilindro, se midió el diámetro en cinco puntos diferentes del mismo, distribuidos a lo largo de su eje, apreciando ½ división en el tambor (0,005 mm). Se desea determinar el diámetro del cilindro, para comprobar si el mismo cumple con una tolerancia de fabricación de ± 0,05 mm. En la tabla 2 se muestran los valores de las mediciones obtenidas.

Los métodos utilizados para la estimación de la incertidumbre son el método GUM y el método de Monte Carlo, los cuales se describen a continuación:

Determinación de la incertidumbre de medición por el método GUM (Guía para la estimación de la incertidumbre de medición)

Para la aplicación de la metodología deben aplicarse los siguientes pasos:

a) Establecer el modelo matemático.
b) Identificar las fuentes de incertidumbre.
c) Evaluación de las fuentes o componentes de incertidumbre.
d) Determinación de la incertidumbre combinada.
e) Determinación de la incertidumbre expandida.
f) Determinación del resultado de la medición.

Tabla 1

Valores aleatorios generados para el diámetro de la pieza cilíndrica (X_i)							
n	Xi	n	Xi	N	Xi	n	Xi
1	10,037 880 81	51	10,045 375 16	101	10,041 952 46	151	10,039 290 6
2	10,041 278 64	52	10,041 538 93	102	10,042 186 72	152	10,043 101 19
3	10,038 004 83	53	10,040 523 32	103	10,044 427 74	153	10,041 564 45
4	10,039 277 97	54	10,043 266 71	104	10,040 028 67	154	10,041 029 4
5	10,039 996 34	55	10,040 064	105	10,044 383 01	155	10,044 311 67
6	10,040 556 62	56	10,041 841 1	106	10,038 192 11	156	10,041 617 42
7	10,039 838 76	57	10,041 308 61	107	10,041 248 35	157	10,046 130 11
8	10,043 341 92	58	10,045 624	108	10,044 353 79	158	10,042 695 75
9	10,043 851 66	59	10,041 522 11	109	10,036 083 63	159	10,040 732 17
10	10,043 863 68	60	10,041 061 75	110	10,041 659 34	160	10,040 726 01
11	10,040 846 71	61	10,042 555 52	111	10,042 091 06	161	10,041 293 85
12	10,039 240 46	62	10,034 654 98	112	10,045 909 66	162	10,044 907 3
13	10,042 882 39	63	10,043 812 98	113	10,041 925 81	163	10,043 768 23
14	10,041 247 74	64	10,041 662 78	114	10,043 499 64	164	10,041 856 04
15	10,041 063 02	65	10,042 397 87	115	10,039 576 3	165	10,040 826 47
16	10,042 448 65	66	10,044 714 18	116	10,043 616 92	166	10,042 031
17	10,045 207 35	67	10,040 526 32	117	10,046 209 01	167	10,043 719 39
18	10,044 144 37	68	10,044 785 67	118	10,045 191 07	168	10,039 004 2
19	10,042 522 15	69	10,044 984 78	119	10,038 033 35	169	10,041 177 68
20	10,038 064 25	70	10,039 697 92	120	10,046 824 46	170	10,040 842 05
21	10,042 210 82	71	10,039 711 14	121	10,041 284 44	171	10,042 727 08
22	10,044 307	72	10,046 380 59	122	10,044 959 66	172	10,042 555 21
23	10,043 475 99	73	10,039 170 06	123	10,042 358 12	173	10,041 529 77
24	10,038 867 42	74	10,040 076 78	124	10,045 261 38	174	10,045 744 36
25	10,045 870 93	75	10,037 175 4	125	10,042 840 23	175	10,039 194 25
26	10,037 880 81	76	10,043 301 57	126	10,044 735 11	176	10,043 162 34
27	10,041 278 64	77	10,041 286 24	127	10,043 048 25	177	10,040 227 77
28	10,038 004 83	78	10,039 695 59	128	10,041 930 82	178	10,042 124 33
29	10,039 277 97	79	10,044 893 07	129	10,043 144	179	10,045 577 26
30	10,039 996 34	80	10,043 460 18	130	10,046 123 7	180	10,040 130 05
31	10,040 556 62	81	10,037 870 5	131	10,045 308 45	181	10,042 302 87
32	10,039 838 76	82	10,042 330 93	132	10,040 974 69	182	10,041 002 93
33	10,043 341 92	83	10,038 033 86	133	10,041 272 72	183	10,038 904 12
34	10,043 851 66	84	10,039 296 46	134	10,041 311 26	184	10,040 266 02
35	10,043 863 68	85	10,047 869 47	135	10,040 841 88	185	10,040 582 23
36	10,040 846 71	86	10,040 742 94	136	10,043 987 59	186	10,041 317 84
37	10,039 240 46	87	10,043 974 03	137	10,039 082 11	187	10,036 696 41
38	10,047 426 38	88	10,044 133 27	138	10,042 889 42	188	10,036 735 55
39	10,042 084 41	89	10,039 225 94	139	10,038 993 05	189	10,040 412 49
40	10,041 719 13	90	10,047 675 44	140	10,045 993 68	190	10,040 402 61
41	10,041 939 43	91	10,039 945 13	141	10,045 042 49	191	10,046 083 38
42	10,039 437 69	92	10,038 947	142	10,043 507 76	192	10,044 813 85
43	10,044 127 63	93	10,043 76723	143	10,042 229 99	193	10,043 787 8
44	10,043 850 18	94	10,039 49385	144	10,043 679 19	194	10,041 043 04
45	10,040 698 17	95	10,046 00372	145	10,039 707 08	195	10,044 512 25
46	10,044 537 52	96	10,044 93795	146	10,045 585 06	196	10,044 748 37
47	10,041 240 73	97	10,043 56507	147	10,043 634 98	197	10,041 694 07
48	10,039 711 2	98	10,040 40391	148	10,045 475 72	198	10,037 262 7
49	10,044 162 57	99	10,041 2844	149	10,043 128 34	199	10,040 130 48
50	10,039 670 89	100	10,039 86634	150	10,044 882 74	200	10,045 088 05

a) Establecer el modelo matemático

Representa la dependencia entre el mensurando (Y) y el valor estimado de cada magnitud de entrada (X_i) en el proceso de medición

$$Y = F(X_1, X_2, X_3) \qquad (1)$$

donde:

$$\begin{array}{l} X_1, u_1 \\ X_2, u_2 \quad \rightarrow \quad Y=f(x) \quad \rightarrow \quad y, u(y) \\ X_3, u_3 \end{array}$$

b) Fuentes de incertidumbre

- Variación de las observaciones repetidas
- Error del instrumento de medición
- Error de apreciación del observador

c) Evaluación de las componentes de incertidumbre.

- Componente debida a la dispersión de las observaciones (evaluación tipo A).

$$u_1 = \frac{t.S}{\sqrt{n}} \qquad (2)$$

- Componente debida al error del instrumento de medición (evaluación tipo B).
  Como medida del error del instrumento, se toma su error máximo permisible y se plica una distribución rectangular:

$$u_2 = \frac{E_m}{\sqrt{3}} \qquad (3)$$

- Componente debida a la apreciación del observador (evaluación tipo B).
  Durante la medición, se apreció ½ división del tambor, es decir 0,005 mm, por lo que, debido a la resolución, existe otra componente de incertidumbre:

$$u_3 = \frac{\delta d}{\sqrt{12}} \qquad (4)$$

d) Determinación de la incertidumbre combinada.

Aplicando la ley de propagación cuadrática de incertidumbre a la ecuación modelo se tiene que:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u^2(x)_i} \qquad (5)$$

e) Determinación de la incertidumbre expandida.

$$U = K.\, u_c(y) \qquad (6)$$

$$K = 2 \quad \text{factor de cobertura}$$

f) Resultado de la medición.

$$y = \bar{X} \pm U \qquad (7)$$

Determinación de la incertidumbre de medición por el método de Monte Carlo

La clave de la simulación Monte Carlo consiste en crear un modelo matemático del sistema, proceso o actividad que se quiere analizar, identificando aquellas variables (inputs del modelo), cuyo comportamiento aleatorio determina el comportamiento global del sistema. Una vez identificados dichos inputs o variables aleatorias, se lleva a cabo un experimento consistente en: 1 generar con ayuda del ordenador muestras aleatorias (valores concretos) para dichos inputs, y 2 analizar el comportamiento del sistema ante los valores generados. Tras repetir n veces este experimento, se dispone de n observaciones sobre el comportamiento del sistema, lo cual será de utilidad para entender el funcionamiento del mismo; obviamente, el análisis será tanto más preciso cuanto mayor sea el número n de experimentos que se lleven a cabo.

El algoritmo de simulación Monte Carlo está fundamentado en la generación de números aleatorios por el método de transformación inversa, el cual se basa sobre las distribuciones acumuladas de frecuencias (tabla 1).

El algoritmo para seguir es el siguiente:

1. Determinar la/s variable/s aleatoria/s y sus distribuciones acumuladas (F).
2. Generar un número aleatorio distribuido uniformemente entre (0 y 1).
3. Determinar el valor de la variable aleatoria para el número aleatorio generado de acuerdo con las clases que se tengan.
4. Calcular media, desviación estándar.
5. Analizar resultados para distintos tamaños de muestra.

Tabla 1

Distribuciones acumuladas de frecuencias		
Distribución	Parámetros	Fórmula Excel
Exponencial	Media = b	= -LN(ALEATORIO())*b
Weibull	Escala = b Forma = a	= b*(-LN(ALEATORIO())^(1/a))
Normal	Media = μ Desv. Estándar = σ	= DISTR.NORM.INV(ALEATORIO(),μ,σ)
Lognormal	Media de Ln(X) = μ Desv. estándar de Ln(X) = σ	= DISTR.LOG.INV(ALEATORIO(),μ,σ)
Uniforme entre a y b	Extremo inferior = a Extremo superior = b	= a+(b-a)*ALEATORIO()

Para el caso de estudio, la variable aleatoria es el diámetro del eje x. Se conoce de información empírica que los datos generados se ajustan a una distribución normal. Los datos fueron generados con ayuda de la hoja de cálculo de Microsoft Excel, por lo que la fórmula utilizada para la distribución normal fue:

$$fx=DISTR.NORM.INV(ALEATORIO(),\mu,\sigma) \quad (8)$$

Los parámetros μ,σ (media y desviación estándar) se conocen que tienen los siguientes valores μ = 10,042 mm s = 0,002 55 mm. Estos valores fueron obtenidos del resultado arrojado por el método GUM.

El modelo matemático es similar al obtenido por el método GUM, las componentes de incertidumbre tipo B, es decir u_2 y u_3 siguen una distribución rectangular, y fueron calculadas de igual forma que por el método GUM. La componente u_1 es debida a la dispersión de las observaciones (tipo A), las cuales son generadas y se distribuyen normalmente; la expresión de cálculo es la misma, pero se obtienen valores diferentes debido a la antes mencionada generación de valores. La incertidumbre combinada y la expandida se hallan de igual forma que por el método GUM.

Tabla 3

Valores de las mediciones obtenidas				
N	X_i	$\overline{X}$	$X_i - \overline{X}$	$(X_i - \overline{X})^2$
1	10,050		+0,008	64.10^{-6}
2	10,035		-0,007	49.10^{-6}
3	10,040	10,042	-0,002	4.10^{-6}
4	10,045		+0,003	9.10^{-6}
5	10,040		-0,002	4.10^{-6}
$\sum$	50,210		0	130.10^{-6}

En la tabla 4 se muestran los resultados obtenidos por ambos métodos. La componente de incertidumbre debido a las observaciones repetidas u_1 es ligeramente menor por el método de Monte Carlos; en ambos casos, se utilizó una muestra de tamaño n = 5.

Tabla 4

Comparación de resultados GUM vs MCS (tamaño de muestra n=5)					
Método	u_1	u_2	u_3	$u_c(Y)$	U
GUM	0,003 57	0,002 31	0,001 44	0,004 49	0,008 98
Monte Carlos	0,001 14	0,002 31	0,001 44	0,002 95	0,005 90

Las componentes de incertidumbres u_2 y u_3 arrojaron el mismo valor para ambos métodos, debido a que se utilizaron las mismas expresiones de cálculos, y no se generaron valores aleatorios para ambas componentes por el método de Monte Carlos. La incertidumbre de medición U resultó ser menor por el método de Monte Carlos aunque la diferencia entre ambos resultados no es significativa. La incertidumbre resultó ser 8,4 veces menor que la tolerancia permitida de fabricación de la pieza por el método de Monte Carlo, y 5,6 veces menor por el método GUM

$$\frac{T}{\mu} = \frac{0{,}050}{0{,}00590} = 8{,}4 \qquad \frac{T}{U} = \frac{0{,}050}{0{,}00898} = 5{,}6$$

Ya que la incertidumbre de medición por ambos métodos está comprendida entre ¼ T y 1/10 T (0,013 y 0,005), el resultado obtenido es satisfactorio.

En la tabla 5 se muestran valores de incertidumbres para diferentes tamaños de muestra n. Dichas muestras se encuentran en la tabla 2; para el caso n= 5, se tomaron las primeras cinco observaciones, para n= 10 las primeras 10, y así sucesivamente. Se aprecia que los valores de incertidumbres disminuyen a medida que aumenta el número de muestra.

Tabla 5

Valores de incertidumbre para diferentes tamaños de muestra (Método de Monte Carlo)					
N	u_1	u_2	u_3	$u_c(Y)$	U
5	0,001 14	0,002 31	0,001 44	0,002 95	0,005 90
10	0,000 982	0,002 31	0,001 44	0,002 89	0,005 78
100	0,000 369	0,002 31	0,001 44	0,002 74	0,005 49
200	0,000 245	0,002 31	0,001 44	0,002 73	0,005 46

Las figuras 1 y 2 representan los histogramas de frecuencias para las muestras de tamaño n= 100 y n= 200. Debido a la forma de ambos histogramas, se puede inferir que los valores se distribuyen de acuerdo con una distribución normal.

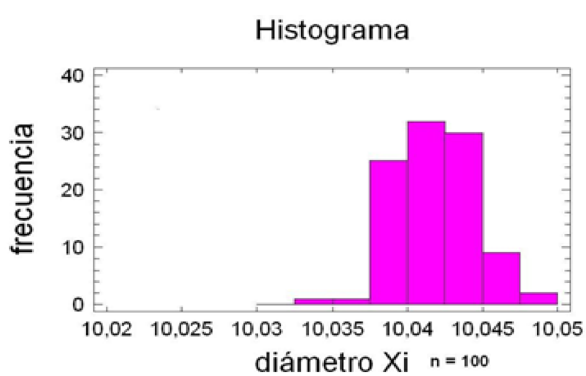

Fig. 1 Histograma de frecuencia para muestra de tamaño n= 100.

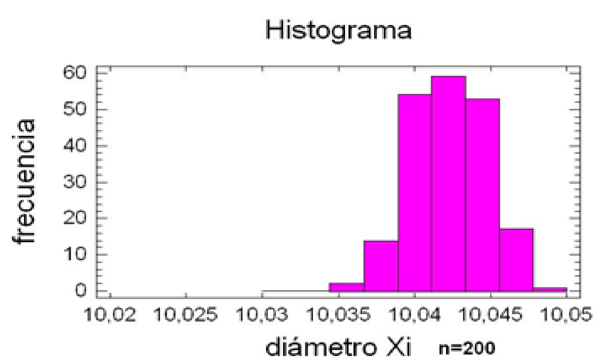

Fig. 2 Histograma de frecuencia para muestra de tamaño n=2 00.

Conclusiones

1. Se ha expuesto la estimación de incertidumbres para el diámetro de una pieza cilíndrica a la temperatura de referencia de 20 °C. Los valores de incertidumbre obtenidos por ambos métodos son muy cercanos entre sí.
2. La distribución de probabilidad del mensurando,

así como sus principales parámetros estadísticos, puede obtenerse fácilmente mediante la aplicación del método de Monte Carlos.

3. Aunque los valores obtenidos por el método de Monte Carlos fueron ligeramente menores que los obtenidos por el método GUM, no se puede afirmar que este método es superior, pero puede utilizarse para validar los resultados obtenidos mediante la aplicación de la GUM.

Bibliografia

1 Wolfgang, A., GUÍA PARA ESTIMAR LA INCERTIDUMBRE DE LA MEDICIÓN. El Marqués, Qro., México, 2004, págs. 1-27.

2 Coello, N., Wisweh, L., Determination and Considerations for the Measurement Deviations in Manufacturing Process, Ed. Otto von Guericke University, preprint 4, Germany, 2001, págs. 1-6.

3 NMX-CH-140-IMNC-2002 Guía para la Expresión de la Incertidumbre de las Mediciones equivalente a Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAP, IUPAC, OIML, Mexico, 1995, págs.1-20.

4 NC OIML V2 , *Vocabulario Internacional de términos generales y básicos de Metrología*, 1era Edición, Ciudad de La Habana, 1995, págs. 1-61.

5 Wisweh, L, Sandau, M., Determination of the Measuring Uncertainty and its Use for Quality Assessment and Quality Control, Ed. Otto von Guericke University, preprint 7, Germany, 1999, págs. 1-13.

6 http://www.geocities.com/CollegePark/Quad/2435/index.html Breve historia de los orígenes del método Monte Carlo.

7 http://wwwcsep1.phy.ornl.gov/mc/mc.html. Libro electrónico sobre simulación MC

8 http://www.geocities.com/WallStreet/9245/vba.htm. Página web donde se muestran algunos ejemplos de simulación MC con Excel y VBA.

9 http://www.csun.edu/~vcmgt0j3/Ch12Notes.pdf. Apuntes sobre simulación MC con Excel

Nomenclatura

MCM Método de Monte Carlo
GUM Guía para la estimación de la incertidumbre de medición
PDF La función de densidad de probabilidad
DISTR.NORM.INV Distribución normal inversa
DISTR.LOG.INV Distribución logarítmica inversa
a Parámetro de la distribución
b Parámetro de la distribución
$\bar{X}$ Media aritmética
S Desviación típica
$\mathbf{E_m}$ Error máximo permisible
μm Micrómetro
n Número de mediciones
δd Resolución
σ Desviación típica poblacional
U Incertidumbre de medición
K Factor de cobertura
$u_c(y)$ Incertidumbre combinada
$\mathbf{X_i}$ Valores de los diámetros
T Tolerancia
U Incertidumbre
t t-student
$\mathbf{u_1}$ Incertidumbre estándar tipo A
$\mathbf{u_2}$ Incertidumbre estándar tipo B
$\mathbf{u_3}$ Incertidumbre estándar tipo B
fx función