

Modelo matemático y solución analítica del funcionamiento de un destilador solar de bandeja

Mathematical Model and analytical Solution of the Operation of a Solar Pan

M. Sc. Susana Fonseca-Fonseca, sfonseca@cies.ciges.inf.cu, M. Sc. Eider Miranda-Perdomo, M. Sc. Alonso Torres-Ten

Centro de Investigaciones de Energía Solar, Santiago de Cuba

En el presente trabajo se realiza la modelación matemática para simular el comportamiento térmico de un destilador solar de bandeja mediante un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias del cual se obtiene su solución, la que permite conocer los valores de la temperatura en la cubierta, el agua a destilar y la bandeja del destilador a través del día, así como se puede determinar también el volumen de agua destilada. Se realiza la validación experimental del modelo propuesto. Este trabajo permite el estudio del comportamiento térmico del equipo bajo diferentes condiciones climáticas y características constructivas, utilizando un software.

Palabras clave: destilación, modelo matemático, fuentes renovables, bandeja, solución analítica, solar.

Presently work is carried out the mathematical model to simulate the thermal behavior of a solar distiller of tray by means of a system of three ordinary differential equations of which its solution is obtained, the one that allows to know the values of the temperature in the cover, the water to distill and the distiller's tray through the day, as well as you can also determine the volume of distilled water. In this work is carried out the experimental validation of the proposed model, it allows the study of the thermal behaviour in different constructive climatic and characteristic conditions, using a software.

Key words: distillation, mathematical model, renewable sources, tray, analytic solution, lot.

Introducción

Si bien es cierto que más de tres cuartas partes del Planeta Tierra están cubiertas por agua, también es cierto que solo un pequeño porcentaje de ésta es potable. Muchas regiones sufren serios problemas de disponibilidad de agua apta para el consumo, para que el agua sea potable en muchas ocasiones es necesario retirar gran parte de las sales presentes. La desalinización de agua por vía solar es una solución posible para la producción de agua potable o agua destilada, en regiones de alta insolación, principalmente en zonas rurales.

La purificación de fluidos, específicamente la desalinización y destilación del agua para consumo humano y animal, utilizando la radiación solar, es una técnica ya desarrollada con ventajas económicas, principalmente por el ahorro de electricidad, petróleo, y la posibilidad de disponer del abasto de agua desalinizada *in situ* ahorrándose los gastos de transportación y todos los inconvenientes inherentes a esta actividad.

En la actualidad se conocen diversos tipos de destiladores solares, entre los que se destacan los

que utilizan el efecto invernadero, por ser este uno de los procedimientos más sencillos y económicos de obtención de agua destilada. Para predecir el comportamiento de cualquiera de estos dispositivos antes de su construcción resulta necesario realizar su modelación matemática y simulación numérica.

En la literatura se encuentran numerosos trabajos dedicados al estudio de estos dispositivos, tanto desde el punto de vista experimental, como a través de simulaciones numéricas, procurando analizar que factores influyen más significativamente en la eficiencia de un destilador solar. La mayor parte de los trabajos se basan en Dunkle R.V. /8/ y Cooper /7/ quienes para calcular la eficiencia realizaron un balance de energía en el sistema, empleando un coeficiente de transferencia térmica global entre la superficie del agua y la cubierta.

Existen diversas tecnologías y materiales para el diseño y construcción de estos equipos, observándose una tendencia mundial en el uso de materiales de bajo costo y fácil adquisición, ello ha conllevado a la utilización de materiales que aún sin presentar una conductividad térmica tan elevada

como los metales, funcionan adecuadamente en destiladores solares, y en muchos casos la masa por unidad de área de la bandeja de estos equipos no es pequeña por lo que el término de acumulación de energía se hace significativo. Esta característica hace que en la modelación del comportamiento de estos equipos sea necesario, para una mejor aproximación a la realidad, tener en cuenta el término de acumulación de energía en la bandeja del destilador solar.

El presente trabajo tiene por objetivo establecer un modelo matemático para el cálculo de las temperaturas en las diferentes regiones del destilador con vistas a caracterizar su funcionamiento dinámico desde el punto de vista térmico así como predecir su productividad, y validar dicho modelo experimentalmente.

Materiales y método

Un destilador solar tipo caseta, llamado también convencional, consiste en un recipiente poco profundo, de forma comúnmente rectangular o cuadrada, con el fondo de color negro u oscuro. Este recipiente aislado térmicamente por el fondo y costados, contiene el agua a evaporar. El sistema consta de una cubierta de material transparente (vidrio o algún plástico) a la radiación solar, la cual tiene una inclinación hacia una o varias canales de recolección del agua destilada.

En un destilador solar de caseta ocurren diversos procesos térmicos que caracterizan su funcionamiento. El funcionamiento del destilador solar se realiza como sigue: de la radiación solar incidente en la cubierta del destilador solar una pequeña parte es absorbida y otra es reflejada por el vidrio, gran parte atraviesa el vidrio y es absorbida por el agua y el material del fondo del destilador. La energía absorbida calienta el agua a destilar y el fondo del destilador, el cual transfiere gran parte de su energía en forma de calor a la masa de agua, la cual eleva su temperatura, por lo que aumenta el movimiento de sus moléculas. Este movimiento se hace más intenso a medida que aumenta la temperatura del agua lo que provoca que una parte de las moléculas deje la superficie del agua por evaporación e incrementa la humedad del aire cercano a la superficie del agua, lo que genera corrientes convectivas dentro del destilador.

La transferencia del vapor de agua del evaporador al condensador se lleva a cabo por difusión y por la convección del aire húmedo. El aire húmedo y caliente sube hacia la cubierta de vidrio, donde parte del vapor de agua se condensa y resbala hacia la canal de recolección, ya como agua destilada. Los procesos físicos de transferencia de calor y masa que tienen lugar en un destilador solar tipo invernadero se representan en la figura 1.

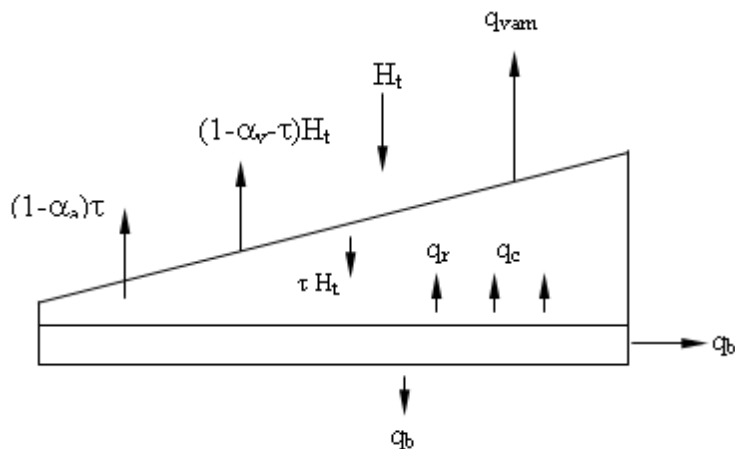


Fig. 1 Relaciones de flujos de calor en un destilador solar.

Para realizar el planteamiento del modelo se hacen las siguientes consideraciones:

- No existen fugas de vapor en el equipo.
- Las superficies del agua y la cubierta se consideran paralelas.
- La viscosidad, conductividad, calor de vaporización se consideran constantes.
- Se considera que no existen gradientes de temperatura en la dirección vertical ni horizontal en la bandeja, el agua y la cubierta.
- La temperatura de la cubierta de vidrio externa e interna son aproximadamente las mismas.
- Las características ópticas de transmitancia, reflectancia, absorbencia y emitancia se suponen constantes. Esto se considera válido, ya que aunque dichas características varían de acuerdo con el ángulo de incidencia del Sol, lo hacen de una manera insignificante para nuestros objetivos.
- La irradiancia solar se simula por una función sinusoidal.

Para la modelación del comportamiento térmico del destilador solar es necesario conocer la temperatura en las tres regiones del equipo. A partir de la diferencia de temperaturas entre el agua y la cubierta es posible calcular el volumen de agua destilada. Para ello se parte del balance de energía en cada una de ellas, es decir en la bandeja, el agua a destilar y la cubierta.

A partir de las consideraciones anteriores se plantearon las siguientes ecuaciones de balance de energía:

Para el día solar

Balance de energía en la cubierta

La variación de energía de la cubierta en un intervalo de tiempo determinado está dado por la diferencia entre la energía captada y la energía entregada por ella en el mismo intervalo de tiempo y se expresa por:

$$M_g C_{pg} \frac{dT_g}{dt} = \tau_1 H_s + h_1(T_w - T_g) - h_2(T_g - T_a) \quad (1)$$

Balance de energía en el agua

La variación de energía de la masa de agua a destilar en un intervalo de tiempo determinado

está dado por la diferencia entre la energía captada y la energía entregada por ella en el mismo intervalo de tiempo y se puede expresar por:

$$M_w C_{pw} \frac{dT_w}{dt} = \tau_2 H_s + h_3(T_b - T_w) - h_1(T_w - T_g) \quad (2)$$

Balance de energía en el recipiente (bandeja)

La variación de energía del recipiente que contiene el agua a destilar en un intervalo de

tiempo determinado está dado por la diferencia entre la energía captada y la energía entregada por él en el mismo intervalo de tiempo y se puede expresar por:

$$M_b C_{pb} \frac{dT_b}{dt} = \tau_3 H_s - h_3(T_b - T_w) - h_4(T_b - T_a) \quad (3)$$

Donde la radiación solar se calcula como sigue (Fonseca S. *et. al.*, (1993)):

$$H_s = \frac{\pi}{2T} H_1 \sin \frac{\pi}{T} t \quad (4)$$

Una vez planteadas las ecuaciones diferenciales de balance de energía, resolviendo este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el Software Mathematica 5.0, se obtuvieron las soluciones generales de estas. Las expresiones obtenidas fueron las que se muestran a continuación.

Para el día solar

Expresión matemática para determinar la temperatura en la cubierta del destilador solar:

$$Tg[t] = ta[t] + (V_1 e^{-v_0 t} + V_2 e^{-v_0 1 t} + V_3 e^{-v_0 2 t} - V_4 \text{Cos}(V_5 t) + V_5 \text{Sin}(V_6 t)) \quad (8)$$

Expresión matemática para determinar la temperatura en el agua a destilar en el destilador solar:

$$Tw[t] = ta[t] + (Ag_1 e^{-Ag_0 t} + Ag_2 e^{-Ag_0 1 t} + Ag_3 e^{-Ag_0 2 t} - Ag_4 \text{Cos}(Ag_5 t) + Ag_5 \text{Sin}(Ag_6 t)) \quad (9)$$

Expresión matemática para determinar la temperatura en la bandeja del destilador solar:

$$Tb[t] = ta[t] + (Ba_1 e^{-Ba_0 t} + Ba_2 e^{-Ba_0 1 t} + Ba_3 e^{-Ba_0 2 t} - Ba_4 \text{Cos}(Ba_5 t) + Ba_5 \text{Sin}(Ba_6 t)) \quad (10)$$

Las variables se han declarado en la simbología

El volumen de agua destilada puede ser calculado mediante la expresión:

$$V = \frac{A_1 * h_{ev} * (T_a - T_v)}{\rho_a * \lambda} \quad (11)$$

donde:

$A_1 \rightarrow$ área del destilador, m^2

$h_{ev} \rightarrow$ coeficiente de transferencia de calor por evaporación del agua, $kJ/h m^2 \text{ } ^\circ C$

$\rho_a \rightarrow$ densidad del agua, Kg/m^3

$\lambda \rightarrow$ calor latente de vaporización del agua, kJ/Kg

Ensayos experimentales y análisis de resultados

El modelo encontrado mediante la solución analítica del sistema de ecuaciones diferenciales utilizando el software profesional MATHEMATICA 5 fue ejecutado en este programa, obteniéndose los resultados que se muestran a continuación:

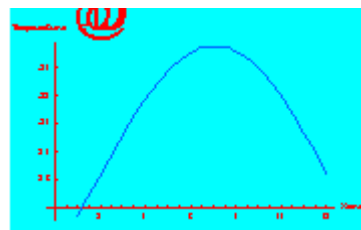


Fig. 5 Temperatura calculada en el vidrio.

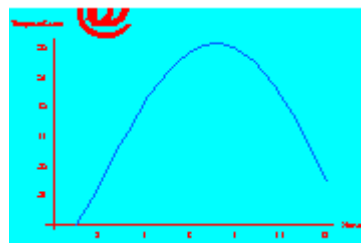


Fig. 6 Temperatura calculada en el agua.

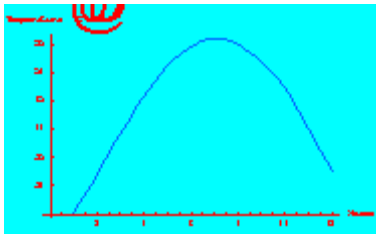


Fig. 7 Temperatura calculada en la bandeja.

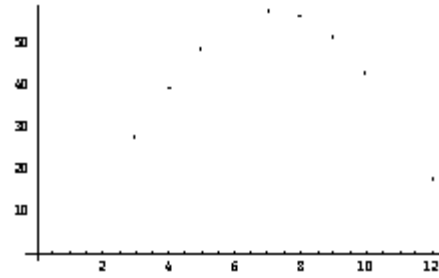


Fig. 8 Volumen de agua destilada calculado de forma horaria.

La validación experimental del modelo planteado se realizó en un equipo construido en el CIES. Los datos de radiación solar, temperatura ambiente, y velocidad del viento se registraron por la Estación actinométrica del Centro de Investigaciones de Energía Solar.

Se utilizaron termorresistencias de platino y termómetros de columna líquida de mercurio con intervalo de 0 a 100 °C y clase de precisión de 1 °C, y una probeta graduada para medir el volumen de agua destilada.

En las figuras se ilustran los valores calculados y experimentales de la temperatura de la cubierta de vidrio, del agua y de la bandeja, así como la productividad horaria a lo largo del día solar. El modelo sigue la misma tendencia con relación a las medidas experimentales. En las figuras con datos obtenidos teóricamente y experimentalmente, las temperaturas máximas se alcanzan alrededor del mediodía solar lo que responde a los picos de irradiancia solar.

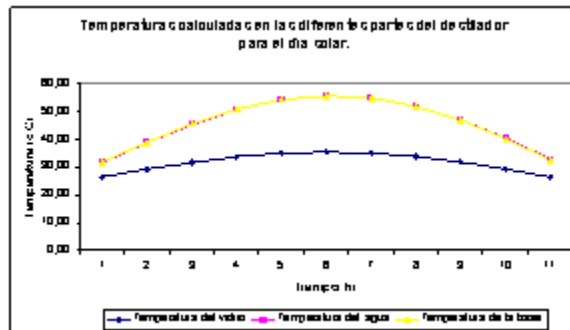


Fig. 9 Temperaturas calculadas en las diferentes partes del destilador solar.

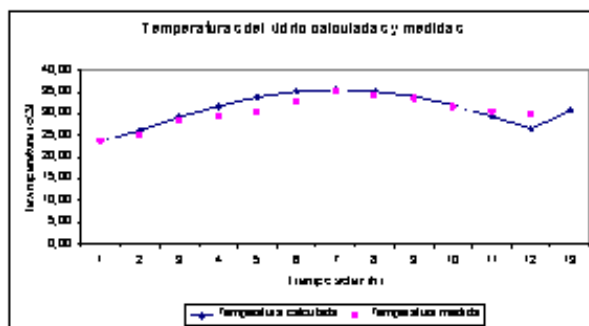


Fig. 10 Temperaturas calculadas y medidas en el vidrio.

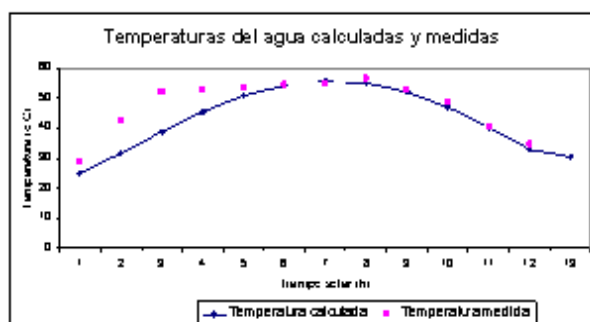


Fig. 11 Temperaturas calculadas y medidas en el agua.

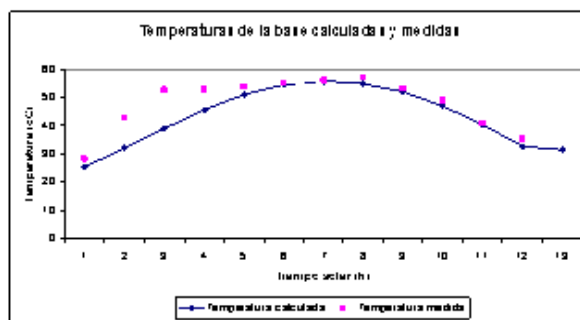


Fig. 12. Temperaturas calculadas y medidas en la bandeja.

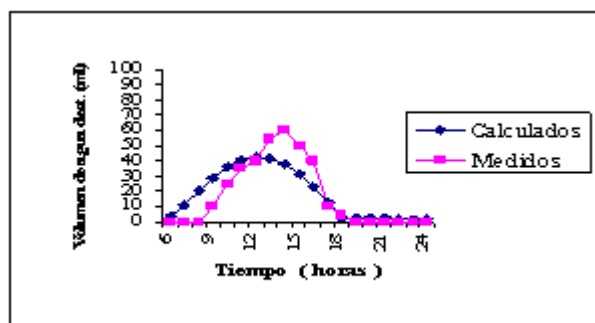


Fig. 13. Volumen de agua destilada medido.

En las figuras 10, 11 y 12 el modelo se ajusta mejor en las horas cercanas al mediodía solar, lo cual se debe a que para este intervalo, la temperatura ambiental estimada (sumando de la variable calculada) se aproxima más al valor experimental; de igual forma para este período, la irradiancia solar calculada por la función sinusoidal se ajusta mejor a los datos experimentales mientras que para las primeras horas de la mañana y últimas de la tarde la radiación real incidente es algo inferior a los valores estimados por el modelo debido a intermitencias naturales (nubosidad) que influyeron mayormente en este período. El error relativo asociado a las temperaturas teóricas y resultados experimentales para la temperatura del vidrio estuvo en el orden del 10 %, presentando el mayor valor en horas de la mañana, para la temperatura del agua el error relativo estuvo en el orden del 20 %, alcanzando la mayor desviación igualmente en las primeras horas de la mañana, la bandeja tuvo un comportamiento similar al del agua. El error relativo asociado al pronóstico de la productividad estuvo en el orden del 10 %.

Conclusiones

- 1 Se obtuvo un modelo matemático que permite el cálculo de las principales variables que caracterizan el funcionamiento dinámico de un destilador solar tipo caseta.
- 2 La evaluación experimental del destilador valida la aproximación de los resultados teóricos, para un error relativo asociado a las temperaturas teóricas y resultados experimentales entre un 10 % y 20 %. El error relativo asociado al pronóstico de la productividad y resultados experimentales estuvo en el orden del 10 %.

Nomenclatura

Mg, Mw, Mb: masa del vidrio, del agua y de la bandeja respectivamente (Kg.)

Cpg, Cpw, Cpb: calor específico del vidrio, del agua y de la bandeja respectivamente (kJ/kg K)

Tg, Tw, Tb: temperatura del vidrio, del agua y de la bandeja respectivamente (°C).

τ_1 : coeficiente de Absorción del Vidrio

τ_2 : fracción de energía solar incidente que es absorbida por el agua

τ_3 : fracción de energía solar incidente que es absorbida por la bandeja

Hs: radiación solar incidente en el vidrio (kJ/m²)

h1: coeficiente de transferencia de calor agua-vidrio (kJ/h m² K.)

h2: coeficiente de transferencia de calor vidrio-ambiente (kJ/h m² K.)

h3: coeficiente de transferencia de calor bandeja-agua (kJ/h m² K.)

h4: coeficiente de transferencia de calor bandeja-ambiente (kJ/h m² K.)

Ht: radiación solar diaria (kJ/m²)

Ta: temperatura ambiente (°C.)

t: tiempo (h)

Ts: duración del día solar, (h.)

$\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \varphi, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \zeta_1, \varphi_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \zeta_2,$
 φ_2 coeficientes calculados por el método de fracciones simples para calcular la Transformada de cada término de la solución.

p, q: coeficientes obtenidos de agrupar las variables del modelo de entrada.

Bibliografía

1. ACHILOV B. M, and CHUGUNKOV V. U. *Calculating the temperatura regimes of solar still*. Applied Solar Energy. Vol. 17 N° 2, 1981.
2. BARRERA C. E., GONZÁLEZ J. M., *et al.* *Comparación de resultados de modelos teóricos y experimentales de destiladores solares*. Memorias de la IX Semana Nacional de Energía Solar, 1985.
3. BROVNIKOV G. N. *et al.* *Determining the thermal losses to the atmosphere from a solar still*, Applied Solar Energy. Vol. 15 N° 4, 1979.
4. CASANOVA J.G., SOLÍS M. *et al.* *Simulación de los procesos térmicos en un destilador solar tipo caseta*. Memorias de la IX Semana Nacional de Energía Solar, 1985.
5. CLARK, J. A. *The Steady-State Performance of a Solar Still*, Solar Energy, Vol. 44, N° 1. Págs. 43-49, 1990.
6. CÉSPEDES HINOJOSA. *Transformada de Laplace*.
7. COOPER P. I. *Digital Simulation of experimental solar still data*. Solar Energy. N° 14, 1973.
8. DUNKLE R.V. *Solar Water distillation: The Roff Type Still and Multiple Effect Diffusion Still*, International Development in Heat Transfer, Conference at Denver, ASME. 1961. Págs. 895-902.
9. MASSIPE, J. R., FONSECA, S, *et al.* "Simulación

-
- numérica del destilador solar de cascada". *Revista Tecnología Química*. Vol. XI, N°1, 1990.
10. MALIK, M. A. *et al.* *Solar distillation*, Pergamon Press. Gran Bretaña, 1982.
11. MURRAY R. SPIEGEL. *Applied Differential Equations*. Second edition.
12. Producción de agua potable para pequeños grupos humanos, Memorias de las I Jornadas Iberoamericanas de Energía Renovable, Centro Iberoamericano de Formación, AECY, Santa Cruz de la Sierra, Bolivia, 1999.
13. FONSECA, S. *et al.* "Simulación numérica del destilador solar de cascada en régimen estacionario". *Revista Tecnología Química* Año .XIV, N°1, 1993.
14. _____. "Modelación matemática de un destilador solar construido con materiales de la construcción civil". *Revista Tecnología Química*.