

ECUACIÓN EXPLÍCITA PARA EL CÁLCULO DE FACTORES DE FRICCIÓN EN LA ZONA DE TRANSICIÓN DEL RÉGIMEN TURBULENTO

Yanán Camaraza Medina*, Juan Landa García**, Daniel Jesús López Delgado**,
Osvaldo Fidel García Morales**

*Empresa Eléctrica Matanzas, **Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos”

En este trabajo se exponen resultados de recientes investigaciones efectuadas en la Universidad de Matanzas relacionadas con la obtención de modelos adimensionales para la determinación del factor de fricción en el interior de tuberías. La investigación consiste de un análisis de regresión efectuado entre el factor de fricción, el número de Reynolds y la rugosidad relativa, utilizando para este fin datos experimentales reportados por diversos autores, estableciéndose una comparación con la ecuación trascendente del factor de fricción de Colebrook, el modelo más exacto conocido, obteniéndose que no existen diferencias significativas, debido a la alta similitud existente entre los resultados obtenidos a partir de estos modelos en el rango estudiado de los parámetros de trabajo, aunque la divergencia entre los valores experimentales y los obtenidos por el modelo propuesto es ligeramente menor.

Palabras clave: modelo, regresión, factor de fricción.

This paper presents the results of recent research conducted at the University of Matanzas related to obtaining dimensionless model for determining the friction factor inside the pipes. The research consists of a regression analysis performed between the friction factor, Reynolds number and relative roughness, using for this purpose experimental data reported by various authors, establishing a comparison with the transcendental equation of Colebrook friction factor, the exact model knowledge obtained no significant differences due to the high similarity between the results obtained from these models in the studied range of operating parameters, although the divergence between experimental values and those obtained by the model proposed is slightly lower.

Keywords: model, regression, factor of friction.

Introducción

El cálculo de la caída de presión por el interior de conductos rectos es una necesidad de muchos cálculos de proyecto o evaluación de instalaciones industriales, el cual se realiza a partir de la ecuación de Darcy.

$$h_l = f * \frac{l}{d_{eq}} * \frac{V^2}{2 * g} \quad (\text{m}) \quad (1)$$

donde:

$$h_l = \frac{\Delta p}{\rho * g} \quad \text{es la pérdida de carga (m)}$$

Δp es la caída de presión en el conducto, Pa.

ρ es la densidad del fluido, kg/m³.

g es la aceleración de la gravedad, m/s².

f es el factor de fricción de Darcy, adimensional.

l es la longitud del conducto por cuyo interior se mueve el fluido, m.

V es la velocidad del fluido por el interior del conducto, m/s.

d_m es el diámetro equivalente del conducto, m.

Para conductos de sección transversal cilíndrica el diámetro equivalente es su diámetro interior.

El valor del factor de fricción de Darcy, y la ecuación utilizada para su cálculo, depende del régimen de flujo. En régimen laminar la expresión general desarrollada es la siguiente (Pavlov et al, 1981):

$$f = \frac{A}{\text{Re}} \quad (2)$$

donde

A es una constante que depende de la forma geométrica de la sección transversal del conducto. Para conductos cilíndricos $A=64$.

Re es el número adimensional de Reynolds, el cual se calcula como:

$$\text{Re} = \frac{V * d_{eq}}{\nu} \quad (3)$$

donde:

V es la viscosidad cinemática del fluido, m^2/s .

En la denominada zona de transición del régimen turbulento, el factor de fricción es función del número adimensional de Reynolds Re y de la rugosidad relativa e/d , o sea:

$$f = \phi(Re, e/d)$$

En la literatura consultada, se recogen un grupo notable de ecuaciones explícitas para el cálculo del factor de fricción de Darcy en tuberías lisas y rugosas para régimen turbulento, dentro de las cua-

les se destacan las ecuaciones mostradas en la tabla 1, las cuales poseen una divergencia máxima aproximadamente igual a al comparar los resultados del valor del factor de fricción obtenido mediante su empleo con los datos experimentales disponibles, según lo reportado por los autores [Chen et al, 1999], [Crane, 2000], [Fernández Diez, 2000], [Mark, 2001], [Nayyar, 2003], [Shames, 2001], [Wallas, 1999], [White, 2001], [Vennard, 1988], [Sámamo, 2003], pero tienen como ventaja la facilidad que brindan para determinar el valor numérico del factor de fricción.

Tabla 1
Ecuaciones empíricas para la determinación del factor f de Darcy

Ecuación	Autor y referencias	Rango de validez	Divergencia máxima (%)
$f = 1.325 * \left[\ln \left(\frac{e/d}{3.7} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^{-2}$	(Streeter, 2000) (4)	$5000 \leq Re \leq 10^8$ $0,01 \leq e/d \leq 10^{-6}$	3,21
$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left[-2 * \text{Log} \left(\frac{e/d}{3.7} + \left(\frac{6,81}{Re} \right)^{0,9} \right) \right]^{-2}$	(Pavlov et al, 1981) (5)	$5000 \leq Re \leq 10^8$ $0,01 \leq e/d \leq 10^{-6}$	2,95
$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left[-2 * \text{Log} \left(\frac{e/d}{3.7} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^{-2}$	Miller citado por (Fox y McDonald, 1995) (6)	$5000 \leq Re \leq 10^8$ $0,01 \leq e/d \leq 10^{-6}$	3,24
$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left[-1,8 * \text{Log} \left(\left(\frac{e/d}{3.7} \right)^{11} + \frac{6,9}{Re} \right) \right]^{-2}$	Ec. Haaland (Zalen y Haaland, 1983) (7)	$5000 \leq Re \leq 10^8$ $0,01 \leq e/d \leq 10^{-6}$	1,44

El valor de la rugosidad absoluta, incluido en las anteriores ecuaciones, varía con el material del conducto y con la tecnología de su fabricación. En este trabajo se utilizarán los

valores recomendados por Ramos [23], Shames [24], Wallas [26], Worth GPSA [29], Vennard [30] y Sámamo [31], los que son reportados en la tabla 2.

Tabla 2
Valores de e para distintos materiales de los tubos

Tipo de tubo	e (mm)
Tubos de acero sin costura	0,2
Tubos de acero galvanizado	0,125
Tubos de aceros viejos y herrumbrosos	0,67 - 2,0
Tubos de hierro fundido nuevo	0,26
Tubos de hierro fundido usados	1,4 - 2,0
Tubos de aluminio lisos	0,015 - 0,06
Tubo de latón, cobre, plomo, (sin costura)	0,0015 - 0,01
Tubos de hormigón sin pulir	3 - 9
Tubos de hormigón pulido	0,3 - 0,8

Colebrook, según [Chen *et al*, 1999], [Crane, 2000], [Fernández Diez, 2000], [Mark, 2001], [Nayyar, 2003], [Shames, 2001], [Wallas, 1999], [White, 2001], [Vennard, 1988] y [Sámano, 2003], encontró que los resultados de las pruebas experimentales para la zona de transición del régimen turbulento son expresados matemáticamente por la ecuación de tipo trascendente:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \text{Log} \left(\frac{e/d}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re}^* \sqrt{f}} \right) \quad (8)$$

Esta ecuación es válida para $4000 \leq \text{Re} \leq 10^8$ y $5 \cdot 10^{-2} \leq e/d \leq 10^{-7}$.

sin embargo, es conocido, y confirmado a la vez por los experimentos, que en la zona totalmente rugosa el valor numérico del número adimensional de Reynolds deja de ejercer influencia sobre el factor de fricción, dependiendo este solamente de la rugosidad relativa del conducto por el cual circula el fluido.

El valor numérico del número adimensional de Reynolds, a partir del cual el factor de fricción comienza a ser constante es determinado mediante la siguiente expresión, recomendada por [Kreit *et al*, 1999], [Crane, 2000], [Fernández Diez, 2000], [Mark, 2001], [Nayyar, 2003], [Shames,

2001], [Wallas, 1999], [White, 2001], [Streeter, 2000], [Sámano, 2003] y [Perry *et al*, 1999]:

$$\text{Re}_{\text{CRIT}} = 550,01 * \left(\frac{e}{d} \right)^{-1,125} \quad (9)$$

El modelo reportado por Colebrook para el cálculo del factor de fricción permite obtener resultados más confiables, ya que, como se afirma, es el de mejor ajuste a los datos que le dieron origen, aunque el error de ajuste a los datos utilizados en su obtención y validación es de $\pm 25\%$, según (White, 2001) y (Sámano, 2003), y tiene como inconveniente la necesidad de implementar un método de aproximaciones sucesivas para determinar el valor del factor de fricción.

Al comparar los valores del factor de fricción obtenidos por la ecuación de Colebrook y por las ecuaciones reportadas en la tabla 1 se puede apreciar que existe una divergencia entre estos, pudiendo apreciarse que los valores calculados por la ecuación de Haaland son los de menor divergencia respecto a los brindados por la ecuación de Colebrook.

La ecuación de Colebrook fue representada gráficamente por Moody, en forma de un diagrama de Stanton, el cual puede encontrarse en las siguientes referencias [Chen *et al*, 1999], [Crane, 2000], [Fernández Diez, 2000], [Mark, 2001], [Nayyar, 2003], [Shames, 2001], [Wallas, 1999],

[White, 2001], [Vennard, 1988], [Sámano, 2003], [Streeter, 2000] y [Fox y McDonald, 1995].

Ante la limitante del empleo del método de aproximaciones sucesivas al calcular el valor del factor de fricción por la ecuación de Colebrook y a que los valores de divergencia de las ecuaciones explícitas mostradas en la tabla 1 respecto a la anterior son aún grandes se ha establecido en este trabajo el objetivo de establecer una ecuación explícita en la zona de transición del régimen turbulento que permita obtener con facilidad el valor del factor de fricción, cuya divergencia respecto a la ecuación de Colebrook sea menor que el de las ecuaciones anteriormente citadas de la tabla 1 y cuyo error de ajuste a los datos sea menor del 30 %.

Desarrollo

(Camaraza, 2008) ha generalizado muchos datos obtenidos a partir de la búsqueda de información sobre el tema (Cameron, 1969), (Wood, 1947) y propone una ecuación para el cálculo del factor f en la zona de transición del régimen turbulento, la cual se expresa de la siguiente forma:

$$f = \frac{1}{(A * B)^2} \quad (10)$$

donde:

$$A = \frac{[1,048 * \ln(Re^{2,5} * \frac{e}{d}^{1,12})]^{-0,01}}{2,497} \quad (11)$$

$$B = \ln\left(\frac{47,5}{Re^3} + \frac{3,27 * (\frac{e}{d})^{1,12}}{Re} + \frac{(\frac{e}{d})^{2,25}}{18,26}\right) \quad (12)$$

En la ecuación anterior $A = 0,392$ para $0,001 \pm e/d$ y $4000 \leq Re \leq 1,81 * 10^5$

La ecuación anterior fue validada con los datos reportados por Halaand y Moody obteniéndose una divergencia de 24 %.

La ecuación propuesta da valores muy cercanos a los obtenidos por la ecuación de Colebrook, con una divergencia máxima de 0,8 % y promedio de 0,3 %.

El error cometido, por exceso o por defecto, con respecto al valor obtenido a partir del modelo reportado por Colebrook se puede evaluar mediante la siguiente ecuación, con un coeficiente de correlación de 97 %.

$$error = \left(1 - \frac{C}{f}\right) * 100 \quad \begin{array}{l} \text{Si el error es (+) es por exceso} \\ \text{Si el error es (-) es por defecto} \end{array} \quad (13)$$

donde:

$$C = 5,302 * \left[\ln\left(\frac{(\frac{e}{d})^{1,2}}{13,74} + \frac{1,36 * \frac{e}{d}}{\sqrt{f} * Re} + \frac{6,3}{Re^{2,5} * f}\right) \right]^2 \quad (14)$$

refundizando en el análisis se obtuvo posteriormente (Camaraza y Landa, 2008) una mejor ecuación que la anterior para la determinación del factor de fricción de Darcy, la cual es válida en el mismo intervalo que el modelo de Colebrook, obtenido eliminando datos de la base utilizada, quedando escrita de la siguiente forma:

$$f = \left[-2 * \text{Log}\left(\frac{e}{d} * 0,2707 - \frac{A_1}{E_1}\right) \right]^2 \quad (15)$$

donde:

$$A_1 = 2,296 * \text{Log}\left[\frac{47,5}{Re^2} + \frac{3,27 * (\frac{e}{d})^{1,12}}{Re} + \frac{(\frac{e}{d})^{2,25}}{18,26}\right] \quad (16)$$

$$E_1 = Re * \left[\text{Log}\left(Re^{2,5} * (\frac{e}{d})^{1,12}\right) \right]^{0,01} \quad (17)$$

Para el caso de tuberías lisas ($e/d = 0$), el factor de fricción de Darcy de la ecuación (15), se obtiene entonces por la siguiente expresión:

$$f = \left[-2 * \text{Log}\left(\frac{A_2}{Re}\right) \right]^2 \quad (18)$$

donde:

$$A_2 = 8,23 * \text{Log}\left[\frac{Re^{0,56}}{3,196}\right] \quad (19)$$

En múltiples ocasiones en la ingeniería práctica se necesita determinar el caudal para un valor preestablecido de caídas de presión y de diámetro, entonces combinando la ecuación propuesta

(15) con la ecuación (1), se obtuvo (Camaraza y Landa, 2008) una nueva ecuación válida en el mismo intervalo que la ecuación (15), la cual permite calcu-

lar el caudal necesario para un valor de diámetro y caída de presión preestablecidas, quedando esta nueva ecuación de la siguiente forma:

$$|Q| = \sqrt{\frac{48,41 * \Delta P * d^5}{L}} * \text{Log} \left[0,27 * \frac{\epsilon}{d} + \nu * \sqrt{\frac{L}{3,082 * \Delta P * d^3}} \right] \quad (20)$$

El caudal calculado en (20) es obtenido en m^3/s

La ecuación propuesta, (15), arroja una divergencia máxima de los valores calculados del factor de fricción con respecto a los obtenidos por el modelo de Colebrook del orden de $\pm 0,144 \%$, valor que fue obtenido implementando un algorit-

mo en la herramienta computacional MATLAB 7.0, concebido para la comparación de dos ecuaciones mediante el cálculo de la divergencia de los valores numéricos que estas ofrecen, los que son obtenidos a partir de iguales valores de sus variables independientes. Su representación gráfica se muestra en la figura 1.

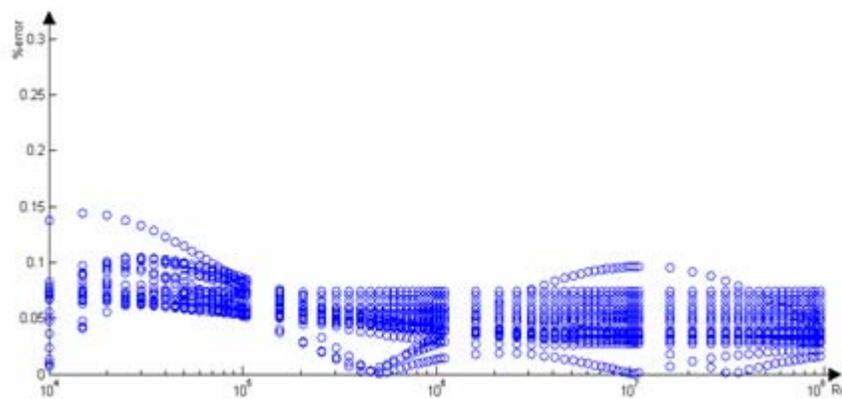


Fig. 1 Gráfico de errores relativos vs número de Reynolds, entre la ecuación de Colebrook y la ecuación a investigar.

Como se observa la divergencia entre estos modelos es pequeña, pero cabe la interrogante de cual de estos modelos representa en mejor medida los datos experimentales que le dieron origen o se utilizan para su validación, por lo cual se realiza un análisis de validación de ambos modelos para tubos nuevos y limpios, utilizando los valores

almacenados en la base de datos de cerca de 2350 valores creada con los datos reportados por Moody y Halaand, los cuales fueron obtenidos de las referencias anteriormente citadas.

El cálculo del error relativo al validar la ecuación de Colebrook se muestra en la figura 2, obteniéndose un valor máximo de 19,98 %.

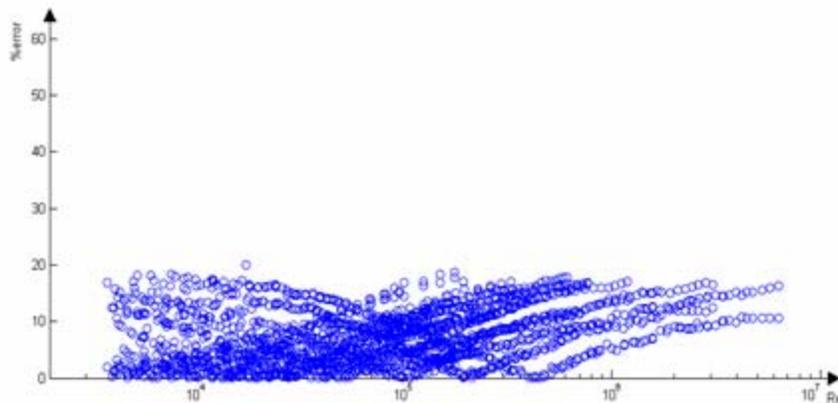


Fig. 2 Gráfico de validación de la ecuación de Colebrook con los datos experimentales.

Para la ecuación que se investiga se encontró un error máximo de validación del 19,89 %, apreciable en la figura 3.

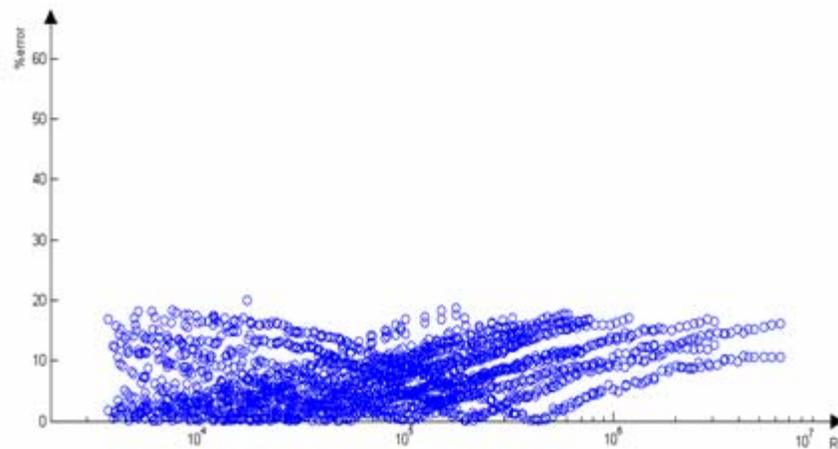


Fig. 3 Gráfico de validación de la ecuación propuesta con los datos experimentales.

De los resultados obtenidos se observa una menor divergencia de los valores obtenidos por la ecuación propuesta con los datos experimentales utilizados en su validación que el alcanzado por el modelo de Colebrook, siendo adicionalmente más sencilla de implementar en un proceso de cálculo dado, por lo que la ecuación investigada y propuesta se recomienda sea utilizada en el rango de valores de rugosidad relativa y de números adimensionales de Reynolds en que fue obtenida y validada.

Si se analiza la ecuación propuesta para diferentes intervalos de Reynolds y rugosidades se aprecia que:

1. Existe una excelente aproximación a los valores experimentales en los intervalos de $10^{-5} < 5 \cdot 10^{-4}$ y $3000 \leq Re \leq 10^5$, ya que el error relativo máximo oscila entre 5 y 12 %, como se muestra en alguna medida en el ejemplo de la figura 4, tendiendo a disminuir el error relativo máximo a medida que disminuye la rugosidad.

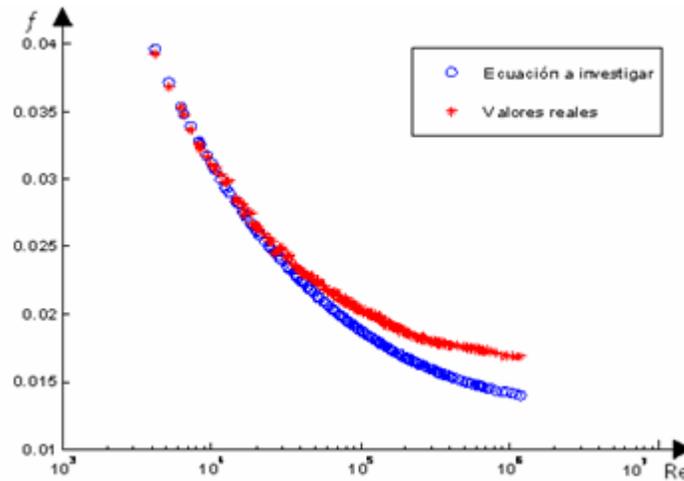


Fig. 4 Comparación entre los valores del factor de fricción obtenido por la ecuación propuesta y los experimentales para un valor de la rugosidad relativa de 0,00015535.

2. Para valores superiores a 105 se aprecia que la divergencia entre el modelo y los datos comienza a ser grande y se incrementa con el

valor del número adimensional de Reynolds, lo que presupone que pudiese ajustarse un modelo más exacto a partir de este valor.

Conclusiones

Se ha obtenido un modelo explícito para la estimación del factor de fricción de Darcy en la zona de transición del régimen turbulento de mejor ajuste a los datos experimentales que le dieron origen que el modelo trascendente obtenido por

Colebrook, lo que facilita su aplicación en los cálculos de Ingeniería y permite alcanzar una mayor precisión en la determinación de sus valores numéricos y en los que se deriven a partir del uso de este parámetro en un proceso de cálculo.

La representación matemática del modelo explícito propuesto para la zona de transición es:

$$f = \left[-2 \cdot \text{Log} \left(\frac{e/d}{0,2707} - \frac{A_1}{B_1} \right) \right]^{-2}$$

donde:

$$A_1 = 2,296 \cdot \text{Log} \left[\frac{47,5}{\text{Re}^2} + \frac{3,27 \cdot (e/d)^{1,12}}{\text{Re}} + \frac{(e/d)^{2,25}}{18,26} \right] \quad \vee \quad B_1 = \text{Re} \cdot \left[\text{Log} \left(\text{Re}^{2,5} \cdot (e/d)^{1,12} \right) \right]^{0,01}$$

Siendo válido para los intervalos de $4000 \leq \text{Re} \leq 10^8$ y $5 \cdot 10^{-2} \leq e/d \leq 10^{-7}$

Se ha obtenido una ecuación que permite el cálculo del gasto a partir de los valores de caída de presión, diámetro y longitud de la tubería utilizando el modelo propuesto.

- Bird, R., et al, "Fenómenos de transporte, Ed. Continental", Madrid, España, 1992.
- Charkinov, Priort, "Cálculo de compresores multietápicos", Ed. Mir, Moscú, URSS, 1981.
- Camaraza Medina, Y., "Selección y elementos para la explotación eficiente de un intercambiador de calor para el enfriamiento del aire de salida de la primera etapa del compresor multietápico modelo A-12X-10", Trabajo de diploma, Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Matanzas, Cuba. Febrero de 2008.
- Camaraza, Y. y J. Landa, "Nueva ecuación para la determinación del factor de fricción en tuberías

Bibliografía

- Bejan, A., "Rules of Thumbs by Mechanical Engineers, Ed. McGraw Hill", New York, E. U. A., 1998.

-
- rectas (no publicado), Informe técnico", Universidad de Matanzas, Camilo Cienfuegos, Matanzas, Cuba. Septiembre de 2008.
- Chen, Liu, *et al*, "Mechanical Engineers Handbook", Ed. CRC Press, Michigan University, Michigan, E. U. A., 1999.
 - Cherkassky, T., Bombas, "Ventiladores y Compresores", Ed. Mir, Moscú, URSS, 1986.
 - Crane, "Flow through valves and pipes", Ed. McGraw Hill, New York, E. U. A., 2000.
 - Dayli, A., 1999, "Dinámica de los fluidos", Ed. John Willey and Sons, New York, E. U. A.
 - Fernández Díez, Pedro, "Mecánica de Fluidos", Universidad de Madrid, España, 2000.
 - Fernández Díez, Pedro, "Ingeniería Térmica", Universidad de Madrid, España, 2000.
 - Fox, Robert W. y McDonald, Alan W., "Introducción a la mecánica de los fluidos", Edición, Ed. John Willey and Sons, México, 1995.
 - Geankoplis, M., "United operations of chemical process, Doc PDF, University of Michigan, Michigan", E. U. A., 1998.
 - Kreit, F., "Mechanical Engineers Handbook, CRC Press, University of Colorado, Colorado", E. U. A., 1999.
 - Landa García, Juan, "Elementos para una explotación más limpia y ecológica del petróleo crudo nacional", Tesis de Maestría, Universidad de Matanzas, Camilo Cienfuegos, Matanzas, Cuba, 2003.
 - Levenspiel, J., "Flujo de fluidos y transferencia de calor", Ed. Jhon Willey and Sons, México, 1993.
 - Mark J., "Mark's Standard Mechanical Engineers Handbook, CRC Press, University of Colorado, Colorado", E. U. A., 2001.
 - McCabe, A. y Smith, J. D., "Operaciones Unitarias en Ingeniería Química", Ed. John Walley and Sons, México, 1991.
 - Nayyar Mohinder L., "Introduction to pipe systems", Ed. John Willey and Sons, Georgia, E. U. A., 2003.
 - Pavlov, K. F., Romankov, P. G. y Noskov, A. A., "Problemas y ejemplos para el curso de operaciones básicas y aparatos en tecnología química", Ed. Mir, Moscú, URSS, 1981.
 - Perry, R. *et al*, "Chemical Engineers Handbook", Ed. McGraw Hill, 7th Edition, E. U. A., 1999.
 - Pons Hernández, A. *et al*, "Termodinámica técnica para ingenieros químicos", Ed. Pueblo y Educación, La Habana, Cuba, 1988.
 - Ramos Páez, N., "Bombas, ventiladores y compresores", Ed. ISPJAE, La Habana, Cuba, 1985.
 - Shames, I., Mecánica de Fluidos, Ed. McGraw Hill, México, 2001.
 - Streeter, V. L., "Mecánica de Fluidos", Ed. McGraw Hill, México, 2000.
 - Wallas, D., "Rules of thumbs in Chemical Engineer", Ed. McGraw Hill, New York, E. U. A., 1997.
 - Wallas, D., "Rules of thumbs in Mechanical Engineers", Ed. McGraw Hill, New York, E. U. A., 1999.
 - White, F., "Fluid Mechanics", Ed. McGraw Hill, Georgia City, E. U. A., 2001.
 - Worth GPSA, "Engineering data Book, 12TH Edition (electronic)", Oklahoma, E. U. A., 2003.
 - Vennard, J. *et al*, "Elementos de mecánica de los fluidos", Ed. Pueblo y Educación, La Habana, Cuba, 1988.
 - Sámano A., "Mecánica de los fluidos", Ed. Continental, México, 2003.
 - Vratón. J., "Mecánica de fluidos", Ed. McGraw Hill, Buenos Aires, Argentina, 2002.
 - Zalen, S. y Haaland, E., "Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow. J. Fluids Engr.trans ASME", 105:89-90, 1983.